Opakování - Nucené kmity s tlumením – řešení v komplexní reprezentaci

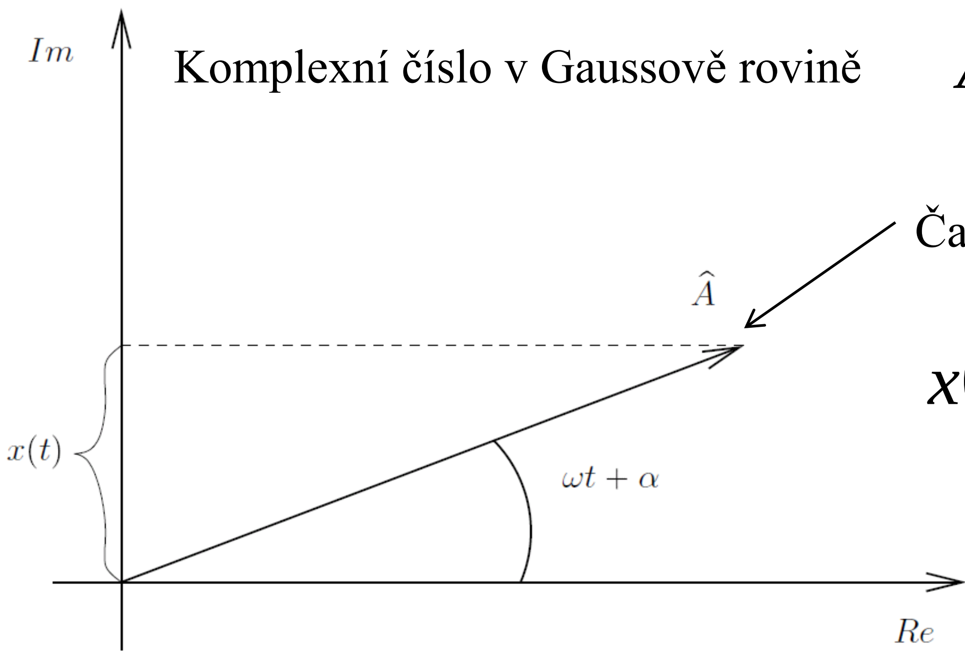
harmonický kmit: $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \longrightarrow Ae^{i(\omega t+\varphi)}$

amplituda (A), úhlová frekvence (ω), fázový posuv (φ)

$$\hat{A} = Ae^{i(\omega t+\varphi)} = A\cos(\omega t+\varphi) + iA\sin(\omega t+\varphi) = A_R + iA_I$$

Komplexní číslo v Gaussově rovině

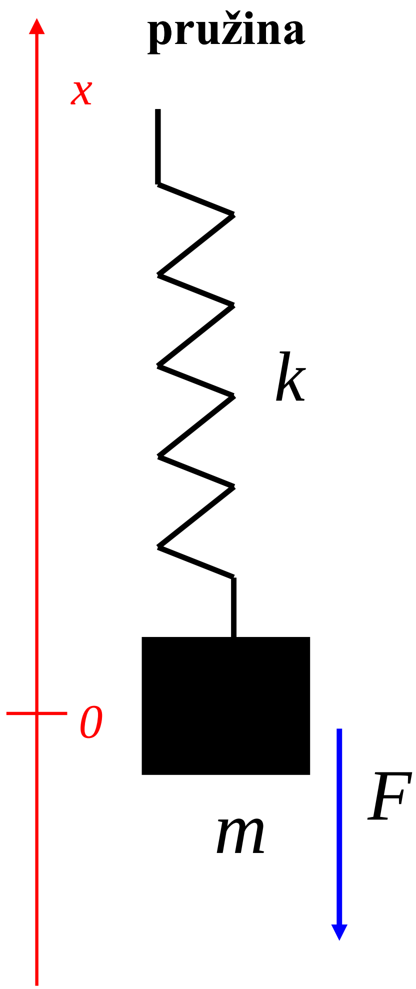
$$A = \left|\hat{A}\right| = \sqrt{A_R^2 + A_I^2}, \quad tg\varphi = \frac{A_I}{A_R}$$



Časový vektor - fázor

$$x(t) = \mathrm{Im}\left\{Ae^{i(\omega t+\varphi)}\right\} = A\sin(\omega t+\varphi)$$

Opakování - Nucené kmity s tlumením – řešení v komplexní reprezentaci



• budící síla:

$$F = F_0 e^{i\Omega t}$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{x} + 2\delta + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}e^{i\Omega t}$$

• obecné řešení: $x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_1 e^{\alpha_2 t} + \hat{x}_p$

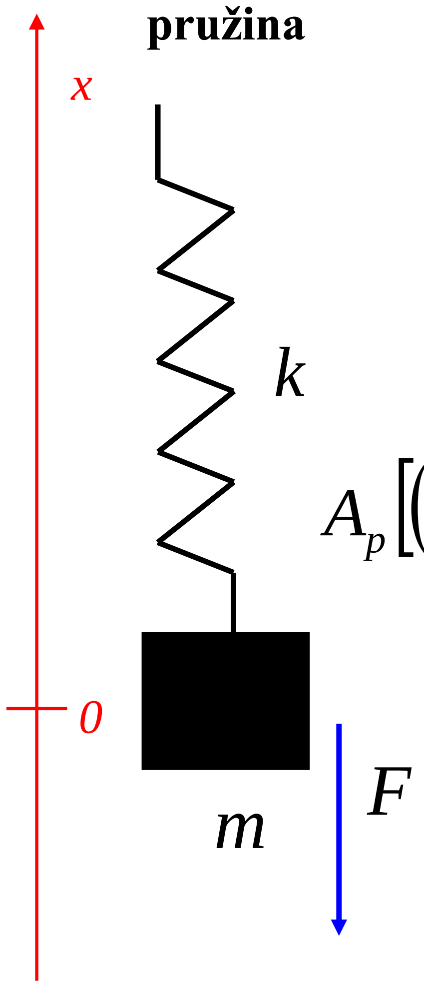
partikulární řešení:

• partikulární řešení: $\hat{x}_p = A_p e^{i(\Omega t + \alpha)}$

$$\left(A_p\omega_0^2 - A_p\Omega^2\right)e^{i(\Omega t+\alpha)} + i2\delta A_p\Omega e^{i(\Omega t+\alpha)} = \frac{F_0}{m}e^{i\Omega t}$$

$$A_p\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) + i2\delta\Omega\right] = \frac{F_0}{m}e^{-i\alpha}$$

Opakování - Nucené kmity s tlumením – řešení v komplexní reprezentaci



• budící síla:

$$F = F_0 e^{i\Omega t}$$

pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}e^{i\Omega t}$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

$$\ddot{x} + 2\delta + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}e^{i\Omega t}$$

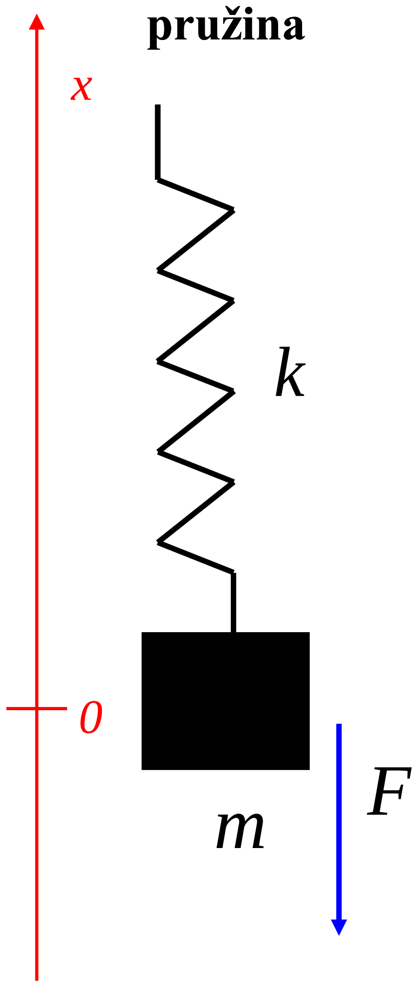
$$A_p\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) + i2\delta\Omega\right] = \frac{F_0}{m}e^{-i\alpha} \quad \hat{K} = \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) + i2\delta\Omega = Ke^{i\beta}$$

$$K = \left|\hat{K}\right| = \sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}, \quad \mathrm{tg}\beta = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$A_p K e^{i\beta} = \frac{F_0}{m}e^{-i\alpha} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\alpha = -\mathrm{tg}\beta = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$A_p = \frac{F_0}{mK} = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

Opakování - Nucené kmity s tlumením



• budící síla:

$$F = F_0 \sin(\Omega t)$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$$

$$\ddot{x} + 2\delta + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$$

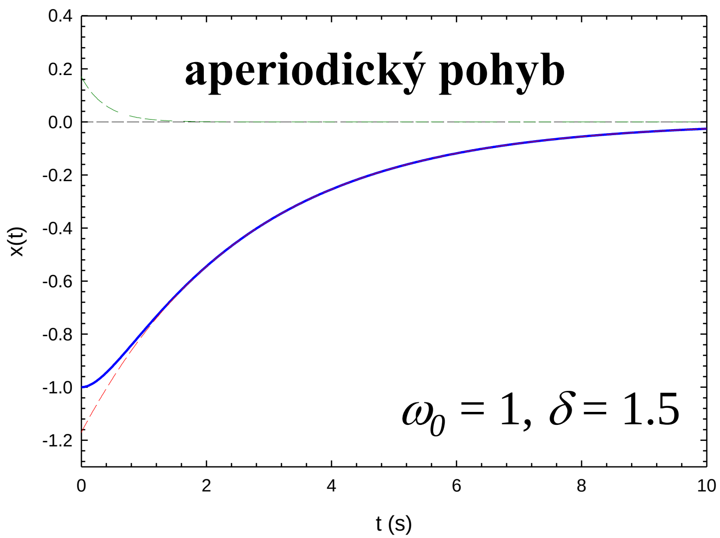
• **Partikulární řešení**:

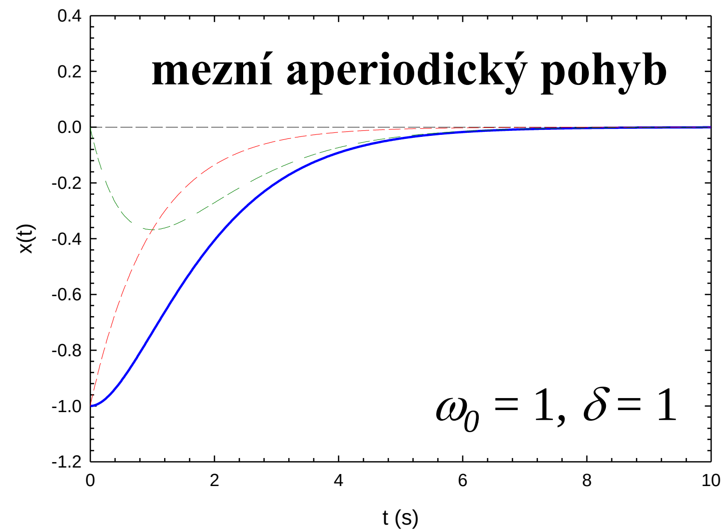
$$x_p = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \sin\left(\Omega t + \operatorname{arctg}\frac{2\delta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}\right)$$

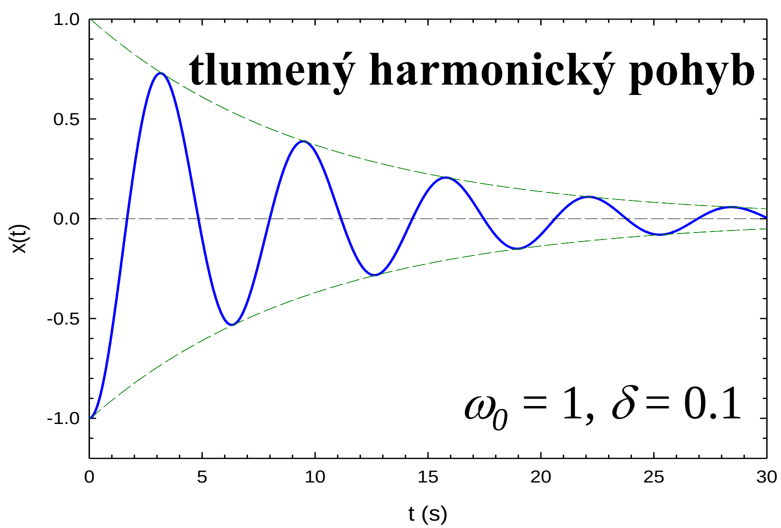
• Část řešení: $C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}, \quad \alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

konverguje k nule s rostoucím časem. Po dostatečně dlouhé době v **ustáleném stavu** lze tento člen zanedbat a za řešení pokládat pouze x_p.

Opakování - Tlumené kmity







Nucené kmity s tlumením v ustáleném stavu

- **Amplituda kmitů:**

$$A_p = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

$$\frac{dA_p}{d\Omega} = \frac{2F_0\left(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\delta^2\right)\Omega}{m\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{dA_p}{d\Omega} = 0$$

$$\downarrow$$

- **rezonance amplitudy**

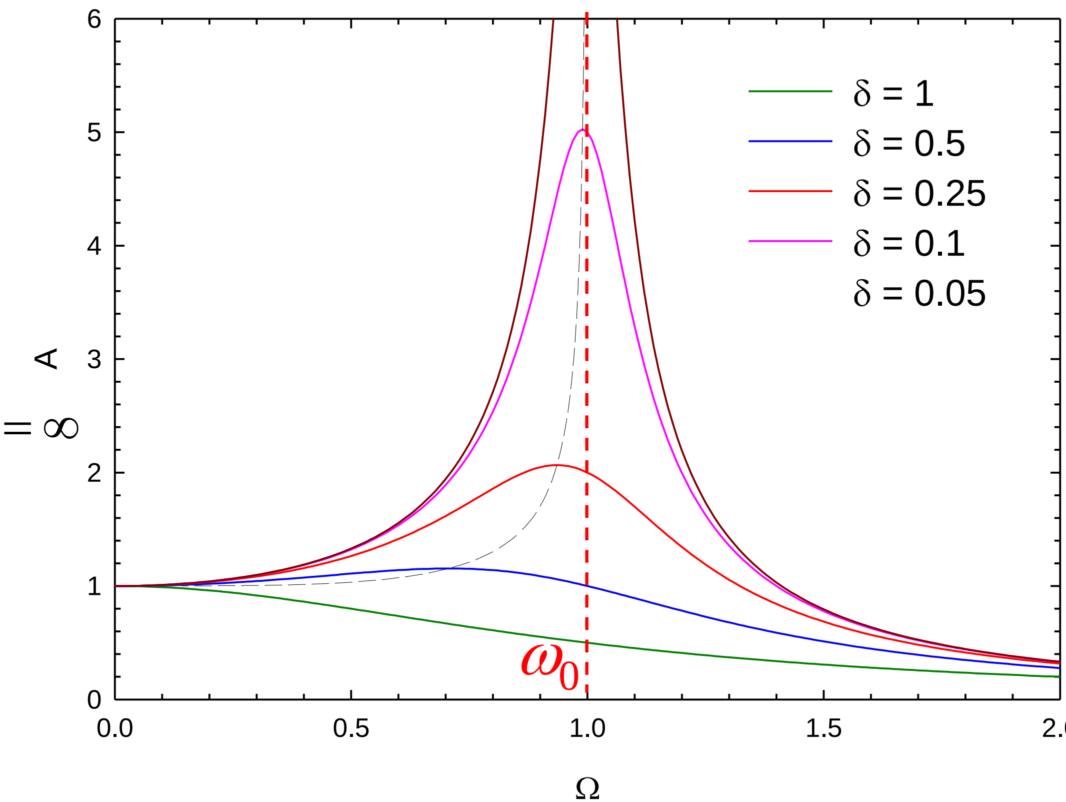
$$\Omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2 \Rightarrow \Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$$A_p(\Omega_r) = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\left(\omega_0^2 - \delta^2\right)}} \qquad \lim_{\delta \to 0} A_p(\Omega_r) = \infty$$

$$\lim_{\Omega \to 0} A_p = A_p(0) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = x_s$$

$$\lim_{\Omega \to \infty} A_p = A_p(\infty) = 0$$

$\omega_0 = 1$, $F_0 = 1$, $m = 1$



Nucené kmity s tlumením v ustáleném stavu

• **Fázový posuv:** $$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{-2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

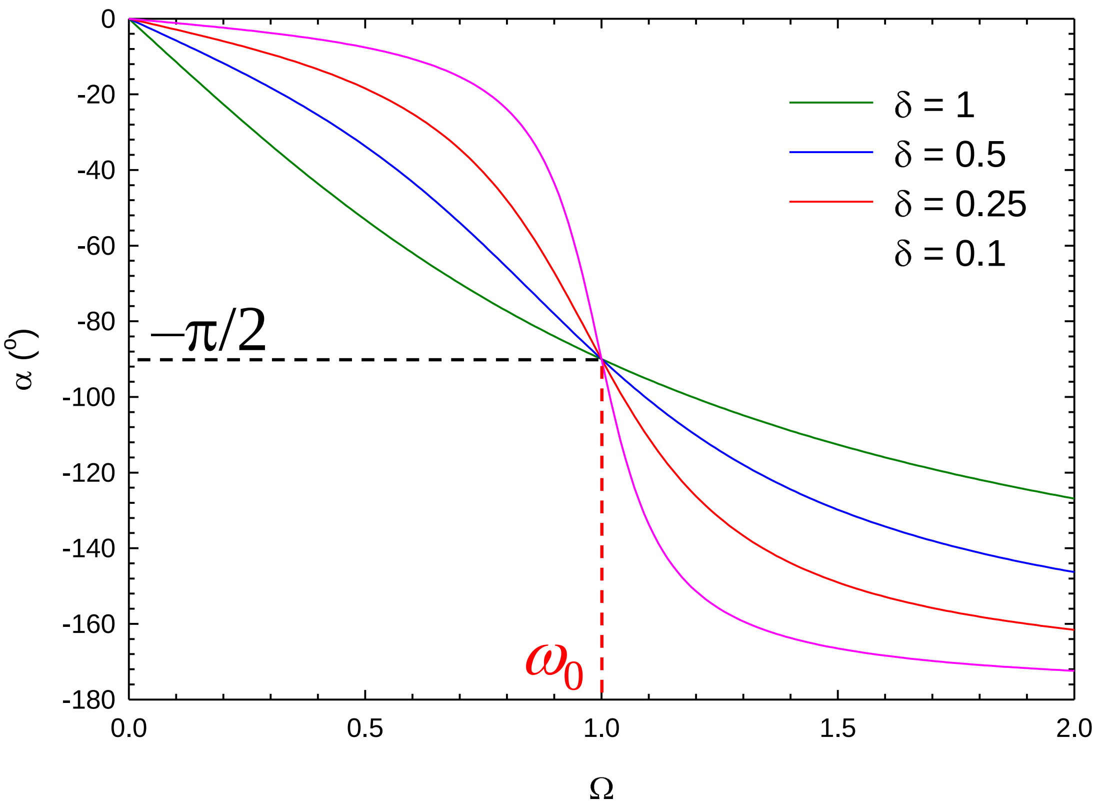
$$\alpha(\Omega_r) = \mathrm{arctg}\left(-\frac{\Omega_r}{\delta}\right)$$

• malé Ω: výchylka x_p je přibližně ve fázi s vynucující silou

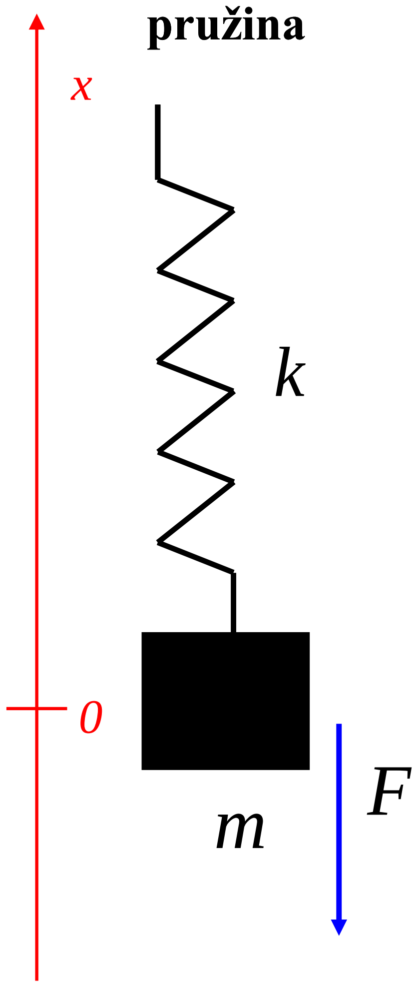
• oblast rezonance $\Omega \approx \omega_0$:
fázové zpoždění výchylky x_p o $-\pi/2$ proti vynucující síle, tj. rychlost je ve fázi s vynucující silou

• velké Ω:
fázové zpoždění výchylky x_p o $-\pi$ proti vynucující síle

$\omega_0 = 1$, $F_0 = 1$, $m = 1$



Mechanická energie nucených kmitů s tlumením v ustáleném stavu



• budící síla:

$$F = F_0 \sin(\Omega t)$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$$

$$x_p = A_p \sin(\Omega t + \alpha)$$

$$\dot{x}_p = A_p \Omega \cos(\Omega t + \alpha)$$

V ustáleném stavu je však úbytek energie doplněn prací vykonanou na hmotný bod vynucující silou F. Průměrný výkon P_v disipativní síly F_v během jednoho kmitu a průměrný výkon P vynucující síly F jsou pak:

$$P = -P_v = -\frac{\Delta E_m}{T} = h A_p^2 \Omega^2 \frac{1}{2} = m\delta A_p^2 \Omega^2$$

$$A_p = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \Rightarrow P = \frac{F_0 \Omega^2 \delta}{m\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]}$$

Nucené kmity s tlumením v ustáleném stavu

- výkon vynucovací síly:

$$P(\Omega)=\frac{F_0^{\,2}\Omega^2\delta}{m\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\delta^2\Omega^2\right]}$$

rezonance výkonu nastává pro

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}=0 \longrightarrow \Omega=\omega_0$$

$$P(\omega_0)=\frac{F_0^{\,2}}{4m\delta}$$

$$\frac{1}{2}P(\omega_0)=\frac{F_0^{\,2}}{8m\delta}=\frac{F_0^{\,2}\Omega^2\delta}{m\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\delta^2\Omega^2\right]}$$

$$\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2=4\delta^2\Omega^2$$

$$\Omega_1=-\delta+\sqrt{\delta^2+\omega_0^2}$$

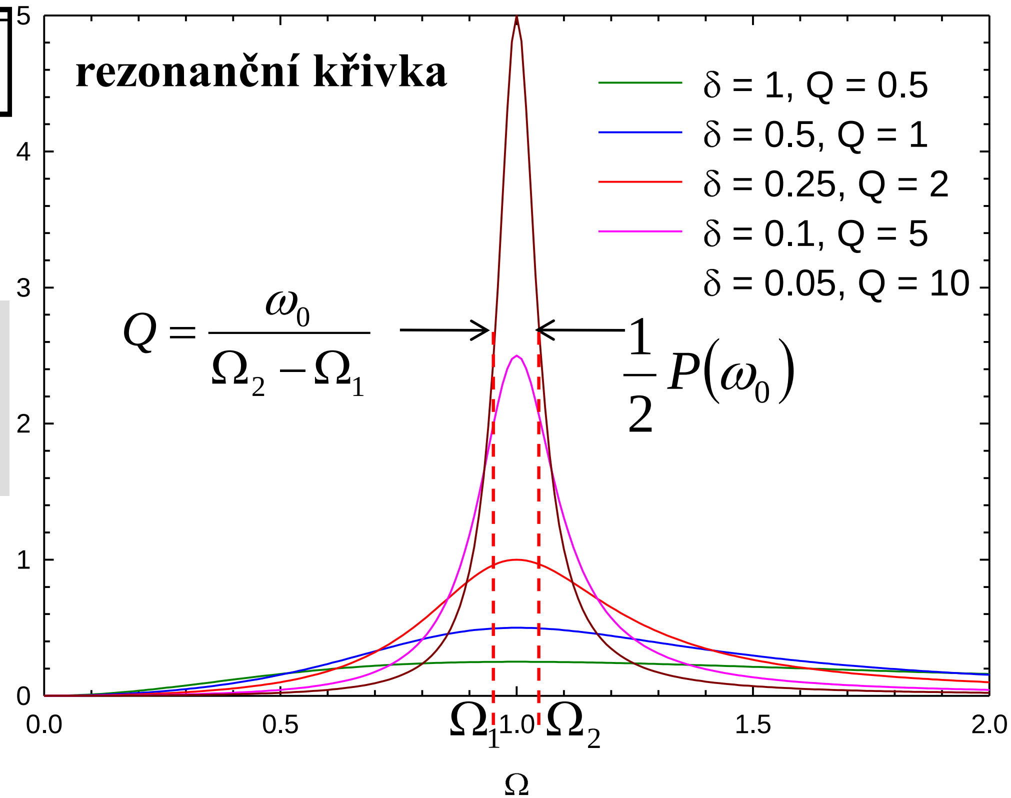
$$\Omega_2=+\delta+\sqrt{\delta^2+\omega_0^2}$$

$$\Omega_3=-\delta-\sqrt{\delta^2+\omega_0^2}<0$$

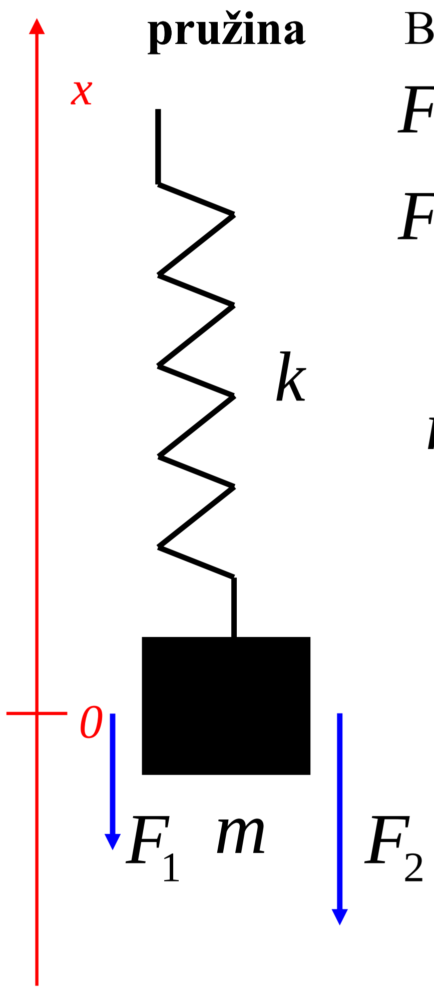
$$\Omega_4=+\delta-\sqrt{\delta^2+\omega_0^2}<0$$

- činitel jakosti

$$Q=\frac{\omega_0}{\Omega_2-\Omega_1}=\frac{\omega_0}{2\delta}$$



Skládání kmitů – princip superpozice



Budící síly:

$$F_1 = F_1(t)$$
$$F_2 = F_2(t)$$

Pohybové rovnice:

$$m\ddot{x}_1 + h\dot{x}_1 + kx_1 = F_1(t)$$
$$m\ddot{x}_2 + h\dot{x}_2 + kx_2 = F_2(t)$$

Řešení pohybových rovnic:

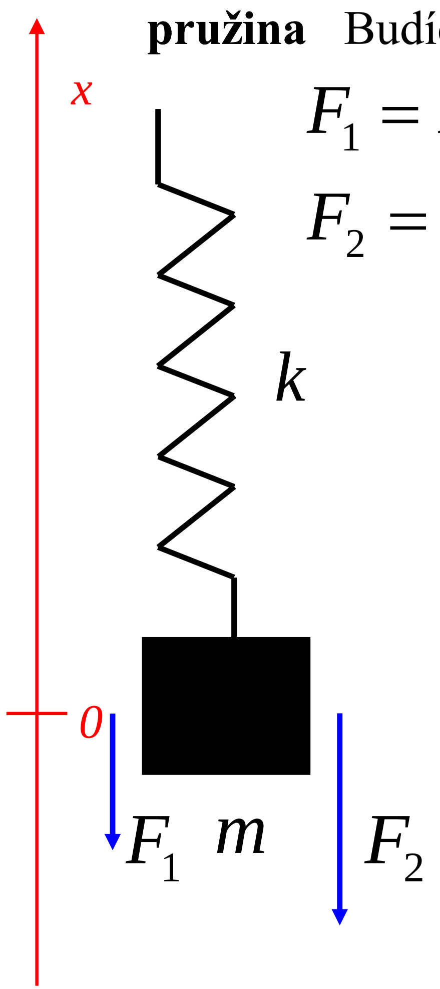
$$x_1 = x_1(t)$$
$$x_2 = x_2(t)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2(x_1 + x_2)}{\mathrm{d}t^2} + h\frac{\mathrm{d}(x_1 + x_2)}{\mathrm{d}t} + k(x_1 + x_2) = F_1(t) + F_2(t)$$

Potom je: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

Řešením rovnice: $m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = F(t) = F_1(t) + F_2(t)$

Skládání kmitů v jednom směru



Budící síly:

$$F_1 = F_{01}\sin(\omega_1 t)$$
$$F_2 = F_{02}\sin(\omega_2 t)$$

Pohybové rovnice:

$$m\ddot{x}_1 + h\dot{x}_1 + kx_1 = F_1(t)$$
$$m\ddot{x}_2 + h\dot{x}_2 + kx_2 = F_2(t)$$

Řešení pohybových rovnic:

$$x_1 = A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$
$$x_2 = A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Řešením je tedy: $x = x_1 + x_2 = A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$

Položíme-li nejprve : $\omega = \omega_1 = \omega_2$ Dostaneme:

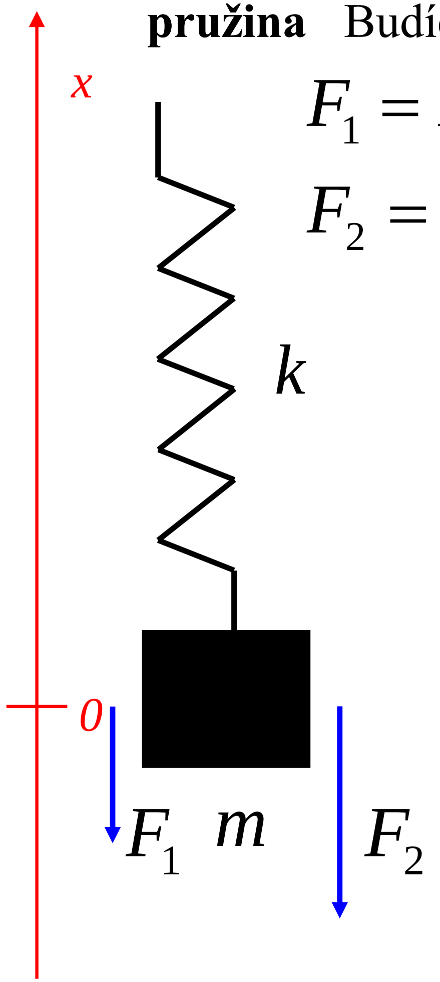
$$x = A_1\sin(\omega t + \alpha_1) + A_2\sin(\omega t + \alpha_2) =$$
$$= A_1\sin\omega t\cos\alpha_1 + A_1\cos\omega t\sin\alpha_1 +$$
$$+ A_2\sin\omega t\cos\alpha_2 + A_2\cos\omega t\sin\alpha_2 =$$
$$= (A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2)\sin\omega t + (A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2)\cos\omega t$$

$$x = A\sin(\omega t + \alpha), \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}$$

Skládání kmitů v jednom směru

pružina



Budící síly:

$$F_1 = F_{01}\sin(\omega_1 t)$$
$$F_2 = F_{02}\sin(\omega_2 t)$$

Pohybové rovnice:

$$m\ddot{x}_1 + h\dot{x}_1 + kx_1 = F_1(t)$$
$$m\ddot{x}_2 + h\dot{x}_2 + kx_2 = F_2(t)$$

Řešení pohybových rovnic:

$$x_1 = A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$
$$x_2 = A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Potom je řešením: $x = x_1 + x_2 = A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$

Položíme-li nejprve : $\omega = \omega_1 = \omega_2$ Dostaneme:

$$x = A\sin(\omega t + \alpha), \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

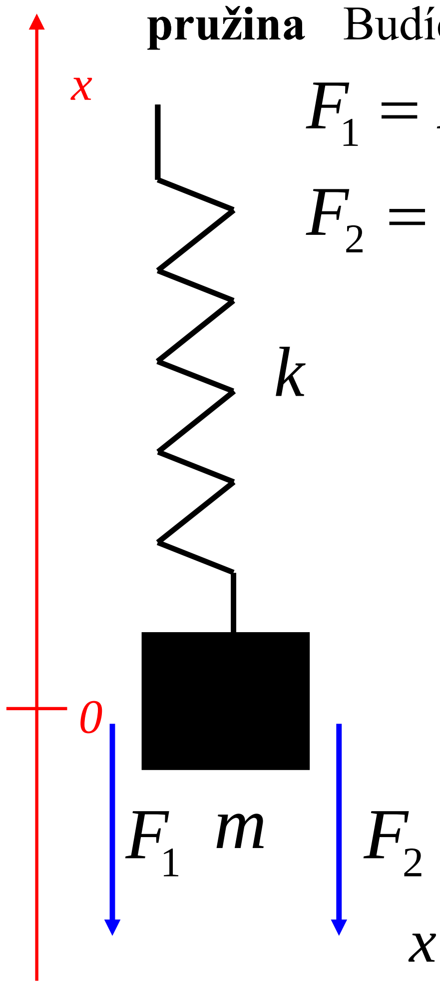
$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}$$

Pokud je: $\alpha = \alpha_2 = \alpha_1, \quad tak \quad A = A_1 + A_2$

Nulovou hodnotu může amplituda nabývat pouze když je:

$$\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = -1, \quad \text{tj.} \quad \alpha_2 - \alpha_1 = (2k-1)\pi, \quad \text{a} \quad A_1 = A_2$$

Skládání kmitů v jednom směru



pružina Budící síly: Pohybové rovnice: Řešení pohybových rovnic:

$$F_1 = F_{01}\sin(\omega_1 t) \qquad m\ddot{x}_1 + h\dot{x}_1 + kx_1 = F_1(t) \qquad x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$

$$F_2 = F_{02}\sin(\omega_2 t) \qquad m\ddot{x}_2 + h\dot{x}_2 + kx_2 = F_2(t) \qquad x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Potom je řešením: $x = x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$

Za druhé vyšetříme případ: $\omega_1 \neq \omega_2, \quad A = A_1 = A_2$ Dostaneme:

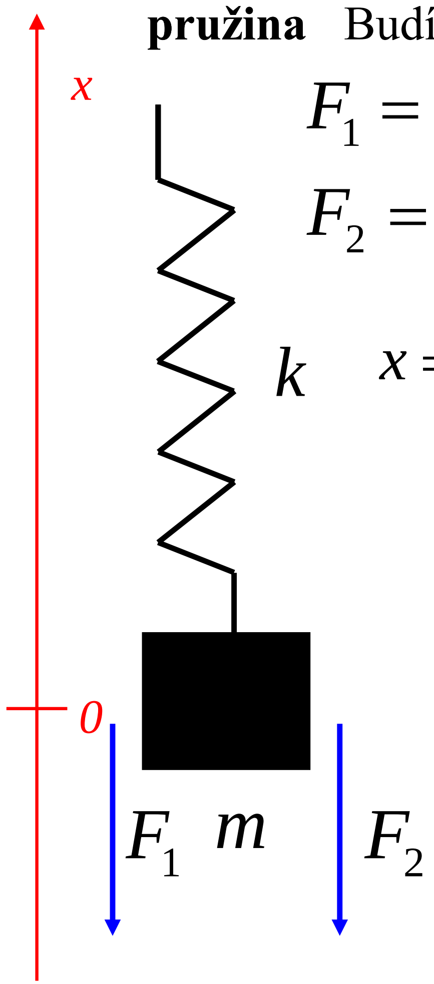
$$x = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)$$

Pokud je: $\omega_1 > \omega_2, \quad tak \quad \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \ll \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

Potom dostaneme harmonický kmit s časově závislou amplitudou :

$$x = A(t)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \alpha\right), \quad kde \quad A(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \alpha\right)$$

Skládání kmitů v jednom směru



Budící síly:

$$F_1 = F_{01}\sin(\omega_1 t)$$
$$F_2 = F_{02}\sin(\omega_2 t)$$

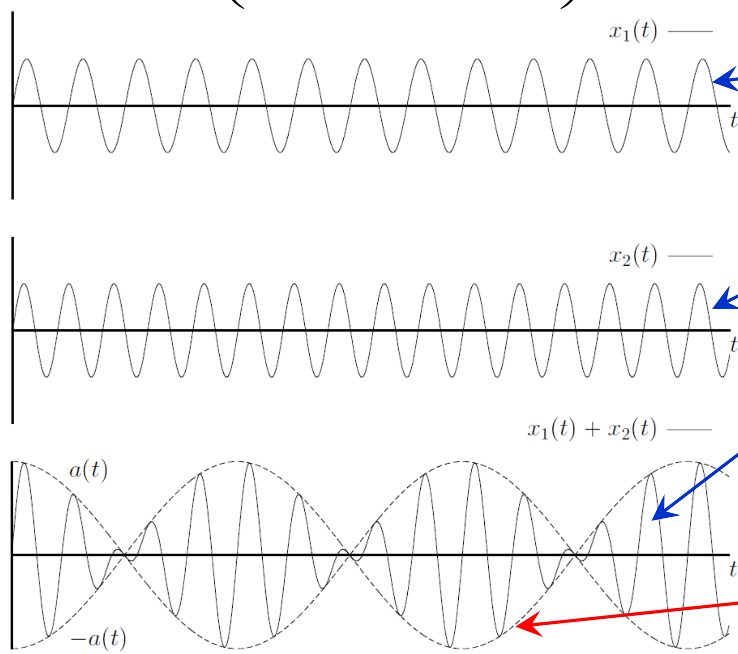
Pohybové rovnice:

$$m\ddot{x}_1 + h\dot{x}_1 + kx_1 = F_1(t)$$
$$m\ddot{x}_2 + h\dot{x}_2 + kx_2 = F_2(t)$$

Řešení pohybových rovnic:

$$x_1 = A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$
$$x_2 = A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$x = A(t)\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\alpha\right), \quad kde \quad A(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\alpha\right)$$



ω_1

ω_2

$\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}$

Amplituda se mění s rozdílovou frekvencí:

$$\omega_r = \omega_1 - \omega_2 \quad a\ ne \quad \frac{\omega_1-\omega_2}{2}$$

Skládání kmitů vzájemně kolmých

Kmity ve směru os x a y:

$$x = A_1 \sin(\omega_1 t)$$

$$y = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha)$$

Položíme-li nejprve : $\omega = \omega_1 = \omega_2$

Dostaneme: $$\frac{x}{A_1} = \sin \omega t, \quad \frac{y}{A_2} = \sin \omega t \cos\alpha + \cos\omega t \sin\alpha$$

Dosadíme za sinωt do druhé rovnice: $$\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1}\cos\alpha = \cos\omega t \sin\alpha$$

Umocníme: $$\left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{y}{A_2}\frac{x}{A_1}\cos\alpha + \left(\frac{x}{A_1}\cos\alpha\right)^2 = \cos^2\omega t \sin^2\alpha$$

Po úpravě dostaneme: $$\frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{y}{A_2}\frac{x}{A_1}\cos\alpha + \frac{x^2}{A_1^2} = \sin^2\alpha$$

Skládání kmitů vzájemně kolmých

Kmity ve směru os x a y:

$$x = A_1 \sin(\omega_1 t)$$
$$y = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha)$$

Rovnice elipsy:

$$\frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{y}{A_2}\frac{x}{A_1}\cos\alpha + \frac{x^2}{A_1^2} = \sin^2\alpha$$

Pokud je fázový rozdíl nulový: $\alpha = 0$

Pohyb po přímce:

$$\frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{y}{A_2}\frac{x}{A_1} + \frac{x^2}{A_1^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1}\right)^2 \quad \Rightarrow y = \frac{A_2}{A_1}x$$

Pokud je fázový rozdíl: $\alpha = \pi/2, \quad a \quad A = A_1 = A_2$

Pohyb po kružnici:

$$y^2 + x^2 = A^2$$

Skládání kmitů vzájemně kolmých

Kmity ve směru os x a y:

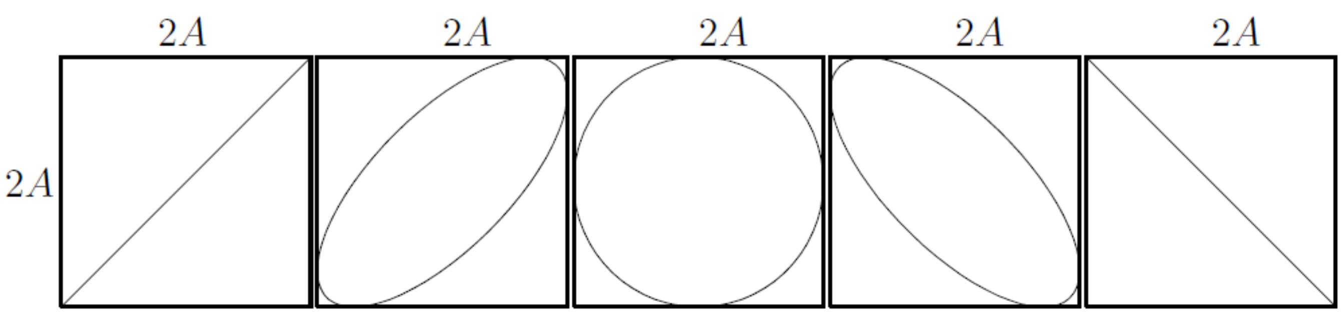
$$x = A_1 \sin(\omega_1 t)$$
$$y = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha)$$

Rovnice elipsy:

$$\frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{y}{A_2}\frac{x}{A_1}\cos\alpha + \frac{x^2}{A_1^2} = \sin^2\alpha$$

Pokud je:

$$A = A_1 = A_2$$



(a) (b) (c) (d) (e)

a) $\alpha = 0$
b) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
c) $\alpha = \frac{\pi}{2}$
d) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ a $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$
e) $\alpha = \pi$.

Skládání kmitů vzájemně kolmých

Kmity ve směru os x a y:

$$x = A_1 \sin(\omega_1 t)$$

$$y = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha)$$

V obecném případě: $\omega_1 \neq \omega_2, \quad -A_1 \leq x \leq A_1, \quad -A_2 \leq y \leq A_2$

Budou-li frekvence v poměru: $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \dfrac{m}{n}$

Lissajousovy obrazce: